CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE DE L'AIR 1976

(Elèves Officiers de l'Air, Elèves Officiers Mécaniciens de l'Air, Elèves Officiers des Bases de l'Air)

ÉPREUVE A OPTION

(Durée : 4 heures)

NOTA : IMPORTANT

Le choix de l'épreuve à option est laissé à l'initiative de chaque candidat au moment du déroulement de cette composition. Ce choix implique impérativement la même option à l'oral avec les coefficients correspondants, c'est-à-dire pour ceux ayant choisi l'épreuve « option mathématiques » les oraux avec les coefficients de l'option M et pour ceux ayant choisi l'épreuve « option sciences-physiques » les oraux avec les coefficients de l'option P.

OPTION MATHÉMATIQUES

La composition comprend deux problèmes indépendants.
Dans les deux problèmes, **R** *désigne l'ensemble des réels.*

PREMIER PROBLEME

E est l'espace vectoriel des polynômes $\mathbf{R}[x]$, polynômes formels à cœfficients réels.

Un polynôme A de cet espace sera désigné suivant les cas par :

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$$

ou par :

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

les cœfficients a_i étant tous nuls à partir d'un certain rang.

1. — On établit deux applications φ_1 et φ_2 de E dans **R**

$$E \underset{\varphi_2}{\overset{\varphi_1}{\rightarrow}} \mathbf{R}$$

Si A défini par $A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$:

$$\varphi_1(A) = \sup [|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_p|]$$

$$\varphi_2(A) = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_p|$$

Montrer que ces deux applications définissent deux normes de l'espace vectoriel E.

On les désignera suivant l'usage par :

$$\varphi_1(A) = \|A\|_1 \qquad \varphi_2(A) = \|A\|_2$$

On sait qu'à ces deux espaces normés correspondent deux espaces métriques définis par les distances :

$$d_1(A,B) = \|A - B\|_1 \qquad d_2(A,B) = \|A - B\|_2$$

et les espaces topologiques associés.

On parlera suivant les cas de l'espace vectoriel E, des espaces normés E_1 et E_2, des espaces métriques (ou topologiques) E_1 et E_2.

. . . /. . .

2. — Montrer que les normes φ_1 et φ_2 ne sont pas équivalentes.

3. — Soit A un polynôme quelconque de E; r un réel strictement positif. $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont les boules (ouvertes) de centre A et de rayon r dans l'espace métrique E_1 et dans l'espace métrique E_2.

a) Montrer que la boule $\mathcal{B}_2$ est incluse dans la boule $\mathcal{B}_1$.

b) Montrer qu'on peut trouver une boule $\mathcal{B}_2$ qui n'est pas un ouvert de l'espace topologique E_1.

Que peut-on en conclure pour les deux topologies des espaces métriques E_1 et E_2 ?

(On rappelle que dans un espace métrique, un ensemble est ouvert si tout point de l'ensemble est centre d'une boule de rayon non nul incluse dans l'ensemble.)

4. — Soit :

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots,$$

une suite de polynômes de l'espace E :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(n)\, x^i$$

Cela revient donc à la donnée d'une suite de suites :

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m,\ \ldots,$$

telle que, pour tout n entier, la suite de réels :

$$\varphi_0(n),\quad \varphi_1(n),\ \ldots,\quad \varphi_m(n),\ \ldots,$$

ait tous ses éléments nuls à partir d'un certain rang (dépendant de n).

Soit L le polynôme :

$$L = l_0 + l_1 x + \ldots + l_p x^p$$

a) Montrer que suivant la norme de E_1, la suite (P_n) converge vers L ~~si, et~~ seulement si, pour $n \to +\infty$:

$$\varphi_0(n) \to l_0 \qquad \varphi_1(n) \to l_1 \ \ldots \qquad \varphi_p(n) \to l_p$$

$$\varphi_{p+1}(n) \to 0 \ \ldots \qquad \varphi_q(n) \to 0 \ \ldots$$

(limites classiques des fonctions réelles).

b) Montrer que ces conditions sont nécessaires pour que la même suite converge vers L dans l'espace E_2.

5. — On considère la suite :

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = 1 + \frac{1}{1^2}\, x$$

$$P_2 = 1 + \frac{1}{1^2}\, x + \frac{1}{2^2}\, x^2$$

$$\ldots$$

$$P_n = 1 + \frac{1}{1^2}\, x + \frac{1}{2^2}\, x^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}\, x^n$$

$$\ldots$$

a) Montrer que dans les espaces métriques E_1, et E_2 cette suite est une suite de Cauchy.

b) Cette suite a-t-elle une limite dans chacun de ces espaces ?

Que peut-on en conclure pour les espaces métriques E_1 et E_2 ?

6. — On considère l'application u, de E dans E, qui à tout polynôme A fait correspondre le polynôme primitive de A admettant la racine 0 donc si :

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$$

$$\left[u(A)\right](x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_p}{p+1} x^{p+1}$$

.../...

Cette application est évidemment linéaire.

a) Montrer que si on la considère comme une application de l'espace normé E_1 dans l'espace normé E_1, u est continue.

b) Montrer de même que u est continue si on la considère comme une application de E_2 dans E_2.

c) Montrer que considérée comme une application de E_1 dans E_2, u n'est pas continue .

(On rappelle que pour qu'une application linéaire soit continue, il suffit qu'elle soit continue à l'origine).

DEUXIEME PROBLEME

1. — Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble, sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$:

$$\mathfrak{D} = [0,1] \times [0,1].$$

Soit encore :

$$\mathfrak{D} = \{(x, y) \quad / \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

Sur $\mathfrak{D}$, on définit la fonction φ :

$$\begin{cases} x \geqslant y & \varphi(x, y) = y(x - y) \\ x \leqslant y & \varphi(x, y) = x(y - x) \end{cases}$$

a) Étudier : la continuité de φ,

l'existence des dérivées partielles $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$.

b) A tout réel x_0, $x_0 \in [0,1]$, on fait correspondre la fonction réelle définie sur [0,1] par :

$$f_{x_0}(y) = \varphi(x_0, y)$$

Étudier la variation de ces fonctions; allure du graphique.

Soit $\mu(x_0)$ le maximum de f_{x_0}; variation de $\mu(x_0)$ quand x_0 varie de 0 à 1.

En déduire les points de $\mathfrak{D}$ où la fonction φ est maximum.

2. — Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur [0,1]; a toute fonction f de E, on fait correspondre la fonction de E, $u(f) = g$, définie par :

$$g(x) = \int_0^1 \varphi(x,y)\, f(y)\, dy \qquad \begin{matrix} u \\ E \to E \\ f \to u(f) = g \end{matrix}$$

a) Montrer que u est linéaire.

b) Montrer que pour $x \in [0,1]$, on a :

$$x\, g''(x) - g'(x) - 2x^2 f(x) + k = 0$$

avec :

$$k = \int_0^1 y\, f(y)\, dy$$

(on pourra décomposer une partie de l'intégrale $\int_0^1$ en $\int_0^1 = \int_0^x + \int_x^1$).

c) Intégrer, pour $x \in [0,1]$ l'équation différentielle :

$$x\, y'' - y' - 2x^2 f + k = 0$$

f étant une fonction de E.

(on désignera par F la primitive de f, Φ la primitive de x.F, s'annulant pour $x = 0$.)

Quel choix judicieux des constantes d'intégration permet de retrouver g.

F / N

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail